دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

# «تمرین درس دینامیک سازه ها»

**مجموعه تمرینات سری دوم**

استاد محترم: جناب آقای دکتر تقی خانی

دانشجو:
سینا کاظم زاده آزاد

شماره دانشجویی: ۸۹۱۲۴۰۶۶

زمان تحویل: ۹۰/۸/۱۴

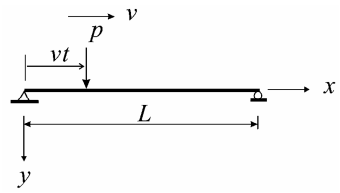
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

**سینا کاظم زاده آزاد** شماره دانشجویی: ۸۹۱۲۴۰۶۶

---

مجموعه تمرینات شماره ۲ درس دینامیک سازه ها: (موعد تحویل: ۹۰/۸/۱۴)

۱) تیر دو سر مفصلی بتنی با مقطع مستطیلی به عرض ۸۰ سانتی متر و ارتفاع ۱۲۰ سانتی متر و طول ۳۰ متر را در نظر بگیرید. بتن دارای جرم واحد حجم ۲/۵ تن بر متر مکعب و مدول الاستیسیته ۲۱۰ تن بر سانتی متر مربع فرض شده است. مطلوبست تعیین حداکثر لنگر ایجاد شده در تیر با عبور اتومبیلی با وزن ۲ تن و سرعت ۷۲ کیلومتر بر ساعت. میرایی برابر ۵٪ و تابع شکل تیر $\phi(x) = \sin \pi x/L$ منظور شود.




**جواب:** با توجه به این که سختی کمک فنرهای اتومبیل و میرایی آن ها به عنوان داده مسأله ارائه نشده است، لذا مسأله فوق به بحث ارتعاش تیر در اثر بار متمرکز متحرک تبدیل می شود[۱]. برای سیستمی مطابق شکل فوق می توان معادله تعادل دینامیکی زیر را تنظیم نمود. در این رابطه u بیانگر خیز و m جرم واحد طول تیر می باشد. همچنین به منظور در نظر گرفتن اثر سختی گسترده در طول تیر، از ($EI u''''$) استفاده شده است؛ زیرا بر اساس مقاومت مصالح می دانیم که مشتق چهارم خیز با نیروی اعمالی رابطه مستقیم دارد. بر این اساس داریم:

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + EIu'''' = P\delta(x - vt)} \quad , \quad ۰ \le vt \le L$$

که در این رابطه $\delta(\ )$ تابع دلتای دیراک می باشد:

توجه شود که در این رابطه $\dot{u}$ مشتق نسبت به زمان و $u'$ مشتق نسبت به مکان فرض شده است. همچنین:

شرایط مرزی تیر دو سر مفصلی: $u(۰,t) = u(L,t) = EI\,u''(۰,t) = EI\,u''(L,t) = ۰$

شرایط اولیه ارتعاش تیر: $u(x,۰) = \dot{u}(x,۰) = ۰$

---

[۱] Vehicle-Bridge Interaction Dynamics, Yang et al., ۲۰۰۴ | Moving Load Problem

* برای حل این معادله دیفرانسیل پاره ای[1] لازم است از روش جداسازی متغیرها استفاده شود. به عبارت بهتر لازم است جواب اولیه به صورت دو تابع مجزا به شکل مقابل فرض شود: $\boxed{u(x,t)=\phi(x)\,q(t)}$ ①

از سوی دیگر بر اساس فرض مسأله بیان شده است که تابع شکل تیر برابر است با: $\phi(x)=\sin \pi x/L$

حال برای حل معادله دیفرانسیل لازم است $u(x,t)$ فوق در معادله دیفرانسیل صفحه قبلی جاگذاری شده و طرفین در $(\sin \pi x/L)$ ضرب شده و انتگرال نسبت به x در بازه $(0 \sim L)$ گرفته شود. نهایتاً:

$$\frac{mL}{2}\ddot{q}+\frac{cL}{2}\dot{q}+\frac{\pi^4 EI}{L^3}q=P\int_0^L \delta(x-vt)\sin(\frac{\pi x}{L})dx \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}+\frac{c}{m}\dot{q}+\frac{\pi^4 EI}{mL^4}q=\frac{2P}{mL}\sin(\frac{\pi vt}{L})$$

بر اساس تعریف فرکانس دورانی طبیعی تیرها داریم: $\omega_n^2=\frac{\pi^4 EI}{mL^4} \quad , \quad \frac{c}{m}=2\xi\omega_n$

لذا معادله نهایی به شکل مقابل خلاصه می شود: $\boxed{\ddot{q}(t)+2\xi\omega_n\dot{q}(t)+\omega_n^2 q(t)=\frac{2P}{mL}\sin(\frac{\pi vt}{L})}$

در واقع معادله فوق نمایانگر پاسخ سیستم یک درجه آزادی به بار هارمونیک است که در کلاس درس به شکل زیر تعیین شده است. در این رابطه به دلیل گسترده بودن سختی، لازم است سختی معادل برای رفتار یک درجه آزادی تعیین شود. این مقدار بر اساس روابط ارائه شده در کتب مرجع[2] برابر است با:

$$\boxed{q(t)=\frac{P}{K^*}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+4(\xi\beta)^2}\left((1-\beta^2)\sin\Omega t-2\xi\beta\cos\Omega t+e^{-\xi\omega_n t}\left[A\sin\omega_D t+B\cos\omega_D t\right]\right)} \quad ②$$

$$K^*=EI\int_0^L \phi''(x)^2 dx=EI\int_0^L \frac{\pi^4}{L^4}\sin^2(\frac{\pi x}{L})dx=\frac{EI\pi^4}{2L^3}$$

برای تعیین ضرایب ثابت A و B از شرایط اولیه مسأله که برابر سرعت و جا به جایی صفر است داریم:

$$q(0)=\dot{q}(0)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=\frac{\beta}{\sqrt{1-\xi^2}}(2\xi^2+\beta^2-1) \quad , \quad B=2\xi\beta} \quad ③$$

---

[1] Partial Differential Equation

[2] Dynamics of Structures, Clough and Penzien, ۱۹۹۵

**نتیجه:** نهایتاً تابع ارتعاش تیر براساس روابط ۱، ۲ و ۳ از صفحه قبلی به شکل زیر قابل بیان می باشد:

$$\boxed{u(x,t)=\sin\frac{\pi x}{L}\frac{2PL^3/EI\pi^4}{(1-\beta^2)^2+4(\xi\beta)^2}\left((1-\beta^2)\sin\Omega t-2\xi\beta\cos\Omega t+e^{-\xi\omega_n t}\left[A\sin\omega_D t+B\cos\omega_D t\right]\right)}$$

که در آن داریم:

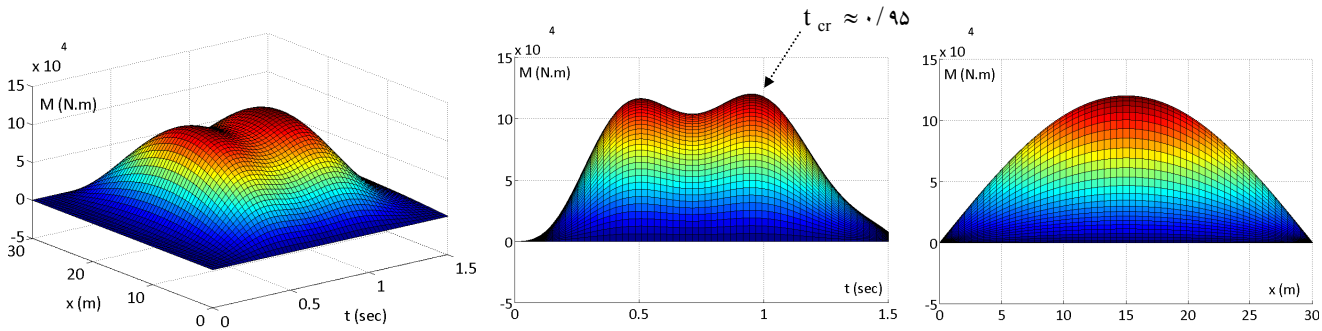
$$A=\frac{\beta}{\sqrt{1-\xi^2}}(2\xi^2+\beta^2-1)\quad,\quad B=2\xi\beta\quad,\quad \beta=\frac{\Omega}{\omega_n}=\frac{\pi v}{\omega_n L}$$

* در معادله حرکت ارائه شده در صفحه اول، باید دقت شود که دیمانسیون طرفین نیرو در واحد طول می باشد. همچنین لازم است به سازگاری واحدهای انتخاب شده توجه بیشتر داشت؛ برای مثال می توان مقدار جرم را بر اساس کیلوگرم، مقدار نیرو بر اساس نیوتن و مقدار طول را بر اساس متر در روابط به کار برد. لذا واحد مدول الاستیسیته در این حالت بایستی بر اساس نیوتن بر متر مربع استفاده شود.

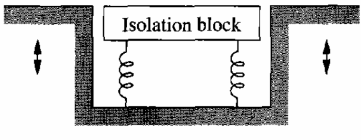
**لنگر حداکثر:** بر اساس مقاومت مصالح در مورد لنگر خمشی می دانیم: $\boxed{M(x,t)=EIu''(x,t)}$

برای تعیین مقدار حداکثر لنگر، به جای استفاده از مشتق گیری، نمودار $M(x,t)$ برای مقادیر عددی مسأله رسم شده است. همچنین فرض شده است که تعیین حداکثر لنگر **فقط در محدوده حضور بار** مدّ نظر مسأله بوده و ارتعاش آزاد بعد از عبور اتومبیل جزو خواسته ها نمی باشد. در نتیجه بر اساس اَشکال زیر مشاهده می شود که حداکثر لنگر خمشی در محدوده بار در وسط تیر و در هنگام رسیدن خودرو به ($v\,t_{cr}$) ایجاد می شود. با توجه به طول تیر و سرعت خودرو، کل زمان عبور برابر ۱/۵ ثانیه می باشد:

$$M_{Max}=M(15\,m,0/95\,sec)=EIu''(15\,m,0/95\,sec)\quad\Rightarrow\quad\boxed{M_{Max}=120\,kN.m}$$



۲) بلوک جداسازی برای ممانعت از ارتعاش وسایل آزمایشگاهی در اثر کارخانه مجاور، مطابق شکل در نظر گرفته شده است. وزن بلوک برابر ۲۰۰۰ پوند بوده و ارتعاش زمین ۱۵۰۰ دور در دقیقه تخمین زده شده است. با صرفنظر از میرایی، مطلوبست تعیین سختی سیستم به طوری که جا به جایی بلوک به ۱۰٪ جا به جایی زمین محدود شود.




**جواب:** بر اساس مطالب ارائه شده در کلاس درس، رابطه انتقال[1] بین پاسخ زمین و پاسخ بلوک بر اساس رابطه زیر قابل تعیین می باشد. همچنین با فرض عدم وجود میرایی، این رابطه خلاصه تر می شود:

$$TR=\sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \xrightarrow{\xi=0} TR=\frac{1}{\left|1-\beta^2\right|} \xrightarrow{\text{Assume } \beta>\sqrt{2}} TR=\frac{1}{1-\beta^2}$$

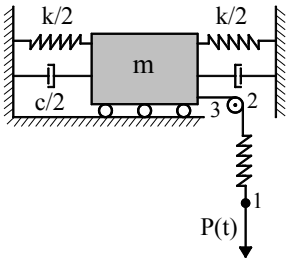
فرض آخیر در ادامه بررسی شده است. بر اساس فرض مسأله: $TR=\frac{1}{1-\beta^2}=0/1 \Rightarrow \beta^2=11$

$$\beta^2=11>2 \Rightarrow \frac{\Omega}{\omega_n}=3/32 \Rightarrow \frac{2\pi\times(15000\div 60)}{\omega_n}=3/32 \Rightarrow \omega_n=47/31\ \mathrm{rad/sec}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k=\omega_n^2\frac{w}{g}=(47/31)^2\times\frac{2000}{386\ [\mathrm{in/sec^2}]} \Rightarrow \boxed{k=11597\ \mathrm{lb/in}\approx 11/6\ \mathrm{kips/in}}$$

---

۳) سیستم دینامیکی زیر را با میرایی $\xi=40\%$ در نظر بگیرید. فرض کنید فنر (۳-۲-۱) دارای سختی فشاری و کششی مناسب می باشد. مطلوبست تعیین پاسخ نقطه ۱ با فرض شرایط اولیه بدون جا به جایی و بدون سرعت اولیه و با فرض $\omega=0/5\omega_n$. همچنین بار وارده به صورت $P(t)=P_o\sin\omega t$ می باشد.




**جواب:** با توجه به یکسان بودن نیرو در امتداد فنر (۳-۲-۱) می توان قبل از بررسی پاسخ نقطه ۱، ابتدا پاسخ نقطه ۲ را با مدل صفحه بعد بررسی نمود.

---

[1] Transmissibility

* پاسخ نقطه ۲ در شکل صفحه قبلی، در واقع پاسخ سیستمی دارای میرایی مطابق شکل زیر به بار هارمونیک می باشد. این پاسخ بر اساس مطالب ارائه شده در کلاس درس بدست آمده است. داریم:

$$u_2 = e^{-\xi\omega_n t}\left[A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t\right] + \frac{P_o}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\omega t - 2\xi\beta\cos\omega t\right]$$

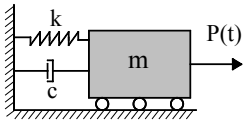
برای مقادیر مسأله:

$$u_2 = e^{-0/4\omega_n t}\left[A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t\right] + \frac{400P_o}{289k}\left[0/75\sin\omega t - 0/4\cos\omega t\right]$$

و از شرایط اولیه:

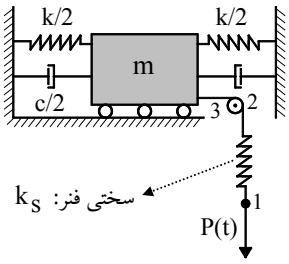
$$u_2(0) = \dot{u}_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{-4P(75\omega - 16\omega_n)}{289k\omega_D} \quad , \quad B = \frac{160P}{289k}$$

$$\boxed{u_2 = e^{-0/4\omega_n t}\left[\frac{-4P(75\omega - 16\omega_n)}{289k\omega_D}\sin\omega_D t + \frac{160P}{289k}\cos\omega_D t\right] + \frac{400P_o}{289k}\left[0/75\sin\omega t - 0/4\cos\omega t\right]}$$




* چنان چه از پاسخ گذرای سیستم، به خصوص به دلیل بالا بودن میرایی سیستم، صرفنظر شود، می توان پاسخ نقطه ۲ را به جای رابطه دقیق فوق چنین بیان نمود:

$$\frac{u_2}{P_o/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}\sin\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{u_2}{P_o/k} = \frac{20}{17}\sin(\omega t - 0/49)}$$




* اگر انتهای شماره ۲ از فنر زیرین ثابت بود، به دلیل عدم وجود جرم و میرایی در نقطه ۱، معادله حرکت گره ۱ برابر بود با:

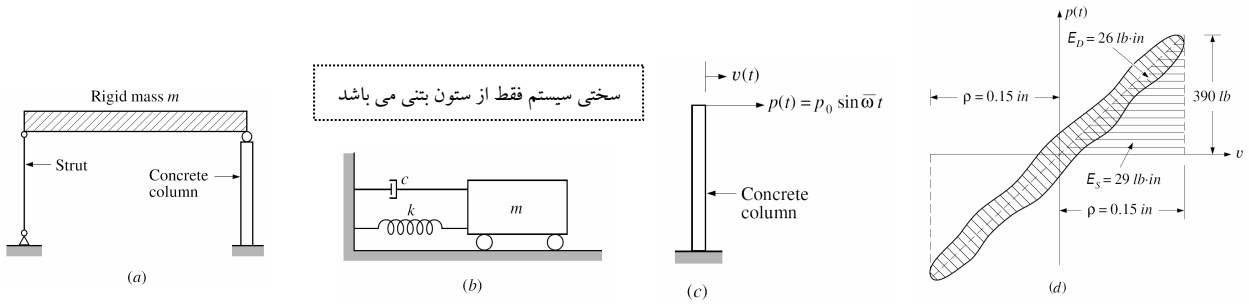
$$u_1^* = \frac{P_o\sin\omega t}{k_s}$$

این مقدار با پاسخ گره ۲ جمع شده و پاسخ کل گره ۱ را نتیجه می دهد:

$$\frac{u_1}{P_o/k} = \frac{u_2}{P_o/k} + \frac{u_1^*}{P_o/k} = \frac{20}{17}\sin(\omega t - 0/49) + \sin\omega t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{u_1}{P_o/k} = \frac{20}{17}\sin(\omega t - 0/49) + \sin\omega t}$$

* لازم به ذکر است که در تنظیم رابطه اَخیر، سختی فنرِ $k_s$، به عنوان مثال، برابر k فرض شده است.

۴) می توان سیستم نمایش داده شده در شکل ( a ) را با مدل ( b ) معادل نمود. مطلوبست تعیین سختی برای مدل ( b ) با استفاده از نتایج حاصل از آزمایش که در آن ستون تحت بار هارمونیک با فرکانس $\overline{\omega} = ۱۰\ \text{rad/sec}$ قرار دارد. همچنین بر اساس نمودار هیسترسیس مطلوبست تعیین c و نسبت میرایی ویسکوز. نهایتاً با فرض مکانیزم میرایی هیسترتیک مطلوبست تعیین فاکتور میرایی هیسترتیک سیستم.




**جواب:** بر اساس نمودار بار تغییرمکان نمایش داده شده داریم:

$$\boxed{k = \frac{\Delta P}{\rho} = \frac{۳۹۰}{۰/۱۵} = ۲۶۰۰\ \text{lb}/\text{in}}$$

حال چنان چه بخواهیم جذب انرژی واقعی سیستم را با یک میراگر ویسکوز معادل سازیم لازم است معادله انرژی جذب شده در یک میراگر را برابر $E_D$ حاصل از آزمایش قرار دهیم. بر این اساس داریم:

$$۲\pi\xi_{eq}\frac{\overline{\omega}}{\omega_n}k\rho^۲ = E_D \xrightarrow{E_s = k\rho^۲/۲} \xi_{eq} = \frac{E_D}{۴\pi\beta E_s} \xrightarrow{\text{Assume } \beta = ۱} \xi_{eq} = \frac{E_D}{۴\pi E_s} \quad (1)$$

که همان طور که در کتب مرجع اشاره می شود، رابطه اَخیر با فرض حالت ($\beta = ۱$) تنظیم شده است و در نتیجه لازم است آزمایشات انجام گرفته نیز بارگذاری هارمونیک را با رعایت این مسأله انجام دهند.

در نتیجه بر اساس رابطه و نمودار هیسترسیس فوق داریم:

$$\boxed{\xi_{eq} = \frac{E_D}{۴\pi E_s} = \frac{۲۶}{۴\pi \times ۲۹} = ٪۷/۱۳}$$

* در مورد c داریم:

$$c_{eq} = ۲m\omega_n\xi_{eq} \xrightarrow{\text{Eq.}۱} c_{eq} = \frac{۲m\omega_n^۲ E_D}{۲\pi \times \overline{\omega} \times k\rho^۲} \Rightarrow c_{eq} = \frac{E_D}{\pi\overline{\omega}\rho^۲}$$

در نتیجه حاصل می شود:

$$c_{eq} = \frac{E_D}{\pi\overline{\omega}\rho^۲} = \frac{۲۶}{\pi \times ۱۰ \times ۰/۱۵^۲} \Rightarrow \boxed{c_{eq} = ۳۶/۸\ \text{lb.sec}/\text{in}}$$

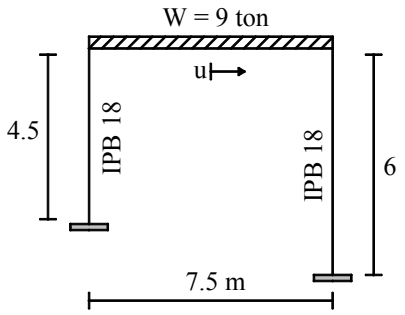
* بر اساس رابطه شماره ۱ از صفحه قبلی داریم: $E_D = ۲\pi\xi_{eq}\frac{\overline{\omega}}{\omega_n}k\rho^۲ = ۲\pi m\xi_{eq}\overline{\omega}\omega_n\rho^۲$

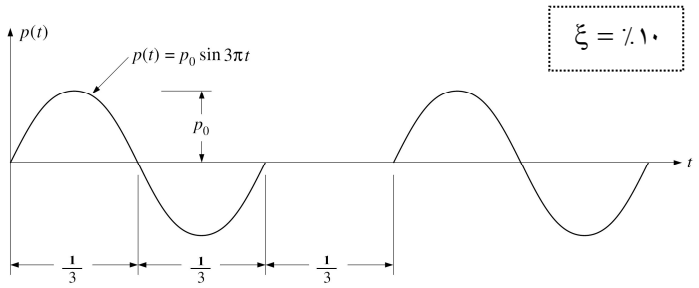
این رابطه نشان می دهد که انرژی جذب شده به دلیل میرایی سیستم به نحوه بارگذاری ($\overline{\omega}$) وابسته است. در حالی که همان طور که در کتب مرجع[۱] اشاره می شود، چنین وابستگی در آزمایشات مشاهده نشده است. بر این اساس در برخی موارد به جای استفاده از میرایی ویسکوز، از مفهوم **میرایی هیسترتیک** استفاده می شود. نشان داده می شود که این میرایی از رابطه مقابل قابل تعیین است: $\zeta = ۲\beta\xi$

مقدار $\xi$ در محاسبات قبلی برای حالت ($\beta = ۱$) تعیین شده است، در نتیجه داریم: $\boxed{\zeta = ۲\xi = ٪۱۴/۲۶}$

---

**۵)** قابی مطابق شکل زیر تحت اثر بار تناوبی $P_o\sin(۳\pi t)$ مطابق نمودار قرار دارد. ضرایب سری فوریه را تعیین نموده و مقدار برش پایه را در لحظه $t = ۵\,sec$ محاسبه کنید. از وزن ستون ها صرفنظر شود.




**جواب:** در ابتدا لازم است بار وارد بر سازه به کمک سری فوریه به صورت تک ضابطه ای بیان شود:

$$P(t) = a_o + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n\cos(n\Omega_o t) + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n\sin(n\Omega_o t) \quad , \quad \Omega_o = \frac{۲\pi}{T_o} = ۲\pi$$

در مورد اولین پارامتر: $a_o = \frac{۱}{T_o}\int_o^{T_o} P(t)dt = \int_o^{۲/۳} P_o\sin(۳\pi t)\,dt = -\frac{P_o}{۳\pi}\cos(۳\pi t)\Big|_{t=۰}^{t=۲/۳} = ۰$

ادامه در صفحه بعدی: $a_n = \frac{۲}{T_o}\int_o^{T_o} P(t)\cos(n\Omega_o t)dt = ۲P_o\int_o^{۲/۳}\sin(۳\pi t)\cos(۲n\pi t)dt$

---

[۱] Dynamics of Structures, Clough and Penzien, ۱۹۹۵

$$a_n = ۲P_o \int_o^{۲/۳} \sin(۳\pi t)\cos(۲n\pi t)dt = P_o \int_o^{۲/۳} \sin(۳\pi t + ۲n\pi t) + \sin(۳\pi t - ۲n\pi t)dt$$

$$a_n = -P_o \left[ \frac{\cos(۳+۲n)\pi t}{(۳+۲n)\pi} + \frac{\cos(۳-۲n)\pi t}{(۳-۲n)\pi} \right]_{t=۰}^{t=۲/۳} = \frac{۶P_o}{\pi(۹-۴n^۲)}\left(۱-\cos\frac{۴n\pi}{۳}\right)$$

با استفاده از روابط مثلثاتی:

$$\boxed{a_n = \frac{۶P_o}{\pi(۹-۴n^۲)}\left(۱-\cos\frac{۴n\pi}{۳}\right) = \frac{۱۲P_o}{\pi(۹-۴n^۲)}\sin^۲\left(\frac{۲n\pi}{۳}\right)}$$

که برای nهای مختلف داریم:

$$\boxed{a_n = \pm\frac{۳۶P_o}{۴\pi(۹-۴n^۲)} \quad , \quad n \neq ۳,۶,...}$$

که برای سایر مقادیر n مقدار $a_n$ برابر صفر خواهد بود. در مورد پارامتر بعدی از ضرایب فوریه داریم:

$$b_n = \frac{۲}{T_o}\int_o^{T_o} P(t)\sin(n\Omega_o t)dt = ۲P_o \int_o^{۲/۳} \sin(۳\pi t)\sin(۲n\pi t)dt$$

$$b_n = ۲P_o \int_o^{۲/۳} \sin(۳\pi t)\sin(۲n\pi t)dt = P_o \int_o^{۲/۳} \cos(۳\pi t - ۲n\pi t) - \cos(۳\pi t + ۲n\pi t)dt$$

$$b_n = P_o \left[ \frac{\sin(۳-۲n)\pi t}{(۳-۲n)\pi} - \frac{\sin(۳+۲n)\pi t}{(۳+۲n)\pi} \right]_{t=۰}^{t=۲/۳} = \frac{-۶P_o}{\pi(۹-۴\pi^۲)}\left(\sin\frac{۴n\pi}{۳}\right)$$

در نتیجه:

$$\boxed{b_n = \frac{-۶P_o}{\pi(۹-۴\pi^۲)}\left(\sin\frac{۴n\pi}{۳}\right) \text{ or } b_n = \frac{\pm ۶P_o}{\pi(۹-۴\pi^۲)}\frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad , \quad n = ۱,۲,... \neq ۳,۶,...}$$

لذا می توان بار را به صورت سری فوریه بیان نمود:

$$\boxed{P(t) = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos(۲n\pi t) + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin(۲n\pi t)}$$

* پس از تعیین تابع بار به صورت سری فوریه، می توان پاسخ سیستم را مورد بررسی قرار داد. داریم:

$$IPB18 \rightarrow I_x = ۳۸۳۰ cm^۴ \quad \Rightarrow \quad k = \frac{۱۲EI}{L_۱^۳} + \frac{۱۲EI}{L_۲^۳} = ۱۲\times۲\times۱۰^۶\times۳۸۳۰\times\left(\frac{۱}{۶۰۰^۳}+\frac{۱}{۴۵۰^۳}\right)$$

لذا سختی یک درجه آزادی قاب خمشی برابر خواهد بود با:

$$\boxed{k = ۱۴۳۴ \ {kgf}/{cm} = ۱۴۰۶۳ \ {N}/{cm}}$$

* در مورد فرکانس طبیعی داریم:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{۱۴۳۴ \times ۹۸۱}{۹۰۰۰} \left[\frac{kgf.cm}{cm.kgf.sec^۲}\right]} = ۱۲/۵ \ rad/sec$$

همچنین در مورد $\beta_n$ می توان نوشت:

$$\beta_n = \frac{n\Omega_o}{\omega_n} = \frac{۲n\pi}{۱۲/۵} = ۰/۵۰۳n$$

**بحث تشدید:** قبل از ادامه کار لازم است بحث تشدید بررسی شود. با توجه به رابطه فوق، برای هیچ یک از مقادیر n امکان ایجاد ($\beta_n = ۱$) وجود ندارد. همچنین با در نظر گرفتن میرایی، مقدار بحرانی برای نسبت فرکانس برابر ($\beta_{Peak} = \sqrt{۱-۲\xi^۲} = ۰/۹۸۹$) می باشد؛ که به شکل مشابه برای هیچ یک از مقادیر n امکان ایجاد این مقدار وجود ندارد. لذا می توان از روابط استاندارد پاسخ در ادامه استفاده نمود.

* بار اِعمالی، به صورت مجموعه بارهای هارمونیکی تعریف شد. بر اساس مطالب ارائه شده در کلاس درسی، پاسخ سیستم یک درجه آزادی به مجموعه بارهای هارمونیکی به شکل زیر قابل بیان است:

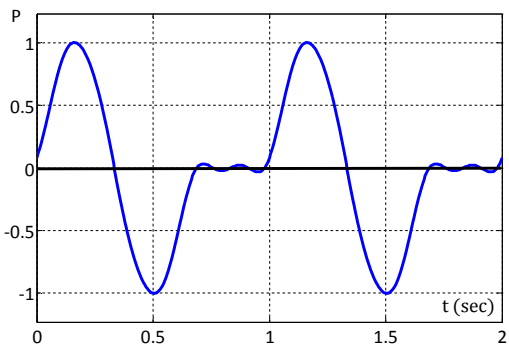
$$u(t) = \frac{a_o}{k} + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{k} \frac{۱}{(۱-\beta_n^۲)^۲ + (۲\xi\beta_n)^۲} \left\{ \begin{array}{l} [a_n(۲\xi\beta_n) + b_n(۱-\beta_n^۲)] \ Sin(n\Omega_o t) \\ + [a_n(۱-\beta_n^۲) - b_n(۲\xi\beta_n)] \ Cos(n\Omega_o t) \end{array} \right\}$$

$$u(t) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۱۴۰۶۳} \frac{۱}{(۱-۰/۲۵۳n^۲)^۲ + ۰/۰۱n^۲} \left\{ \begin{array}{l} [۰/۱n\,a_n + b_n(۱-۰/۲۵۳n^۲)] \ Sin(۲n\pi t) \\ + [a_n(۱-۰/۲۵۳n^۲) - ۰/۱n\,b_n] \ Cos(۲n\pi t) \end{array} \right\}$$

در نتیجه برای لحظه ($t = ۵ \ sec$) داریم:

$$\boxed{u(۵) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۱۴۰۶۳} \frac{a_n(۱-۰/۲۵۳n^۲) - ۰/۱n\,b_n}{(۱-۰/۲۵۳n^۲)^۲ + ۰/۰۱n^۲}} \quad (۱)$$

* در شکل مقابل نحوه بیان بار به کمک سری فوریه و استفاده از MATLAB برای ($n_{max} = ۵$) نمایش داده شده است. حال با استفاده از رابطه شماره ۱ فوق و نرم افزار:




$$\frac{u}{P_o} = -۲/۳۶۷ \times ۱۰^{-۵} \xrightarrow[V = k.u]{} \boxed{V_{Base} = ۰/۳۳ P_o \ [N]}$$

۶) مطلوبست تعیین پاسخ سیستم جرم- فنر تحت بار تناوبی:

$$P(t)=\begin{cases}-\dfrac{2P_o}{\overline{T}}t \quad , & -\dfrac{\overline{T}}{2}\le t\le 0\\ +\dfrac{2P_o}{\overline{T}}t \quad , & 0\le t\le \dfrac{\overline{T}}{2}\end{cases}$$

**جواب:** در ابتدا لازم است بار وارد بر سازه به کمک سری فوریه به صورت تک ضابطه ای بیان شود. با توجه به این که تابع بار وارده، تابعی زوج می باشد، لذا ضرایب $b_n$ سری فوریه برابر صفر خواهند بود:

$$a_o=\frac{1}{T_o}\int_o^{T_o}P(t)dt=\frac{2}{\overline{T}}\int_o^{\overline{T}/2}\frac{2P_o}{\overline{T}}t\,dt=\frac{P_o}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{T_o}\int_o^{T_o}P(t)\cos(\frac{2n\pi t}{\overline{T}})dt=\frac{4}{\overline{T}}\int_o^{\overline{T}/2}\frac{2P_o}{\overline{T}}t\cos(\frac{2n\pi t}{\overline{T}})dt$$

$$a_n=\frac{4}{\overline{T}}\int_o^{\overline{T}/2}\frac{2P_o}{\overline{T}}t\cos(\frac{2n\pi t}{\overline{T}})dt=\frac{4P_o}{\overline{T}}\left[t\sin(\frac{2n\pi t}{\overline{T}})+\frac{\overline{T}}{2n\pi}\cos(\frac{2n\pi t}{\overline{T}})\right]_{t=0}^{t=\overline{T}/2}$$

$$a_n=\frac{4P_o}{\overline{T}}\left[t\sin(\frac{2n\pi t}{\overline{T}})+\frac{\overline{T}}{2n\pi}\cos(\frac{2n\pi t}{\overline{T}})\right]_{t=0}^{t=\overline{T}/2}=\frac{2P_o}{n^2\pi^2}[\cos(n\pi)-1]=-\frac{4P_o}{n^2\pi^2}\quad , \quad n=1,3,5,...$$

لذا می توان بار را به صورت سری فوریه بیان نمود:

$$\boxed{P(t)=a_o+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{2n\pi}{\overline{T}}t)}$$

* پاسخ سیستم یک درجه آزادی بدون میرایی به مجموعه بارهای هارمونیکی به شکل زیر می باشد:

$$u(t)=\frac{a_o}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n(1-\beta_n^2)\mathrm{Sin}(n\Omega_o t)+a_n(1-\beta_n^2)\mathrm{Cos}(n\Omega_o t)}{k(1-\beta_n^2)^2}\quad , \quad \Omega_o=\frac{2\pi}{\overline{T}}$$

بر اساس مقادیر این سؤال داریم:

$$\boxed{u(t)=\frac{P_o}{2k}-\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{k(1-\beta_n^2)}\frac{4P_o\mathrm{Cos}(2n\pi t/\overline{T})}{n^2\pi^2}}$$

* لازم به ذکر است که در رابطه فوق ( $\beta_n=\overline{\omega}_n/\omega_n$ ) می باشد و رابطه با این فرض تنظیم شده است که نسبت بین فرکانس طبیعی بار و فرکانس طبیعی سازه، باعث ایجاد حالت تشدید ( $\beta_n=1$ ) نمی شود.